CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2014

PARTE TEORICA

(10 puntos) 1. Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y sea $S \in \mathbb{R}$.

(a) Escribir las definiciones formales de que: • $\lim_n a_n = 0$, • $\sum_n a_n = S$.

(b) Supongamos que $(a_n)_n$ es estrictamente decreciente y que $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Decir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(b1) $\lim_n a_n = 0$.

(b2) $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene máximo y es > 0.

(b3) $\sum_n a_n$ converge.

Responder **solamente a uno** de los siguientes apartados.

(c) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es afirmativa y probarla.

(d) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es negativa y dar un ejemplo que muestre que dicha afirmación en efecto es falsa.

(10 puntos) 2. Sea F una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y sea (a, b) un punto de $\mathbb{R}^2$.

(a) Escribir la definición formal, en términos de sucesiones, de que F es continua en (a, b).

(b) Supongamos que F puede expresarse como un producto de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en la forma $F(x, y) = f(x)g(y)$.

Aplicando la definición dada en (a), probar que si f es continua en a y g es continua en b, entonces F es continua en (a, b).

(c) Responder **solamente a uno** de los siguientes apartados.

(c1) Probar que si f no es continua en a, y $g(b) \neq 0$, entonces F no puede ser continua en (a, b).

(c2) ¿Si g es continua en b y $g(b) = 0$, podría ser F continua en (a, b) aunque f no lo sea en a? Justificar la respuesta.

(10 puntos) 3. (a) Enunciar el Teorema del Valor Medio.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$. Elegir una de las siguientes implicaciones, y probarla utilizando dicho teorema.

(b1) $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f$ es una función constante en $\mathbb{R}$.

(b2) $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f$ es una función estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$.

(c) Para la implicación elegida, decir si el recíproco de dicha implicación es o no cierto. En caso de respuesta afirmativa, probarlo. En caso de respuesta negativa, dar un ejemplo que muestre que dicho recíproco en efecto es falso.

(10 puntos) 4. Sea f una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ con funciones componentes $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea (a, b, c) un punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Escribir las definiciones, en términos de límites, de las derivadas parciales en (a, b, c) de f_i $(i = 1, 2)$, respecto a cada una de las variables x, y, z.

(b) Escribir la matriz Jacobiana de f en (a, b, c).

(c) Escribir la definición de que f es derivable en (a, b, c).

(d) Escribir una condición suficiente para que f sea derivable en (a, b, c), es decir, una condición para la que se verifique

$$f \text{ satisface } \ldots\ldots \implies \text{f es derivable en } (a, b, c).$$

NOTAS.

• En cada una de las cuatro cuestiones, todos los apartados tienen el mismo peso.

• Para los alumnos que hayan superado el examen parcial:

- Sólo tienen que responder a las cuestiones 3 y 4.
- Si desean mejorar la calificación del examen parcial, entonces tienen que responder también a las cuestiones 1 y 2.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2014

PARTE PRACTICA

(10 puntos) 1. Calcular razonadamente el supremo e ínfimo del siguiente conjunto, especificando si son máximo y mínimo respectivamente.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : |(x-1)(x+2)| < x+2\}.$$

(10 puntos) 2. Consideremos la sucesión $(a_n)_n$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+1} + \frac{n^2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Calcular $\lim_n a_n$.
(b) Comprobar que la serie $\sum_n \frac{a_n \sin(n)}{n^4}$ es convergente.

(10 puntos) 3. Sea $f : (-5, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5+x} & \text{si } -5 < x \leq 0 \\ \sqrt{5}\left(1 + \frac{1-\cos(\sin(x))}{5x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) Comprobar que f es derivable en $(-5, \infty)$.
(b) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 de f en el punto adecuado, calcular un valor aproximado de $\sqrt{3.99}$ con tres cifras decimales.
(c) Hallar una cota del valor absoluto del error cometido en el cálculo aproximado realizado en (b).

(10 puntos) 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} e^{-1/(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Comprobar que f es continua en $x = 0$.
(b) Estudiar los límites direccionales de g en $(0,0)$.

(c) Comprobar que g es continua en $(0, 0)$.
(d) Hallar el gradiente de g en $(0, 0)$.

NOTAS.

• En cada uno de los cuatro problemas, todos los apartados tienen el mismo peso.
• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.